INTERVAL KALIBRASI UNTUK REGRESI INVERSI GAUSS

Calibration Interval for Inverse Gaussian Regression

Baidowi[1] dan Suryo Guritno[2]

Program Studi Matematika
Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada

ABSTRACT

Inverse Gaussian regression models are useful for regression data where both variables are nonnegative and variance of the dependent variable depends on the independent variable. Zero intercept inverse Gaussian regression models are presented with nonconstant variance and constant ratio of variance to the mean. Calibration interval give interval estimator for the independent variable.

Keywords: regression, zero intercept, calibration interval

PENGANTAR

Dalam menggunakan model regresi sederhana, pada umumnya dianggap bahwa data berasal dari populasi yang berdistribusi normal, dalam hal ini biasanya galat dianggap berdistribusi normal dengan variansi konstan. Untuk data tahan hidup sering kali digunakan populasi dengan distribusi seperti eksponensial, Weibull, lognormal dan inverse Gauss.

Woldie dan Folks (1995) membahas tentang interval kalibrasi untuk regresi inversi Gauss untuk model lamda tunggal, model rasio konstan dan model variansi konstan. Beliau memperoleh interval kalibrasi untuk ketiga model tersebut.

Chhikara dan Folks (1978) menyatakan bahwa Davis pada tahun 1977 memandang model regresi linear sederhana untuk Y pada X dengan mean Y adalah fungsi linear dari X dengan asumsi bahwa untuk setiap X, Y berdistribusi inversi Gauss.

Dalam penelitian ini akan membahas interval kalibrasi pada X jika diberikan Y, yaitu jika dimiliki himpunan data n observasi independen Y_i, selanjutnya ditambahkan sebanyak t independen Y_j yang diobservasi pada suatu X tak diketahui, maka suatu interval prediksi yang memuat

1)Swasta
2) Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

X disebut interval kalibrasi. Interval kalibrasi yang diteliti meliputi dua model yang diperkenalkan oleh Davis dan Whitmore di atas. Model pertama adalah

$$Y_i \sim IG(\beta x_i, \lambda);\ i = 1, 2, ..., n;\ x > 0,\ \beta > 0 \text{ dan } \lambda > 0.$$

dengan Y_i independen. Selanjutnya model ini akan disebut model lamda tunggal.

PEMBAHASAN

Distribusi Inversi Gauss

Fungsi padat peluang variabel random X berdistribusi inversi Gauss dengan parameter μ dan λ dilambangkan dengan $X \sim IG(\mu, \lambda)$ adalah :

$$f_X(x, \mu, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda}{2\pi x^3}}\, e^{-\left(\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)} & \text{, untuk } x > 0 \\ = 0 & \text{, untuk yang lain} \end{cases}$$

dengan μ dan λ positif.

Fungsi pembangkit momen X $M_X(0) = \exp\left\{\dfrac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(1 - \dfrac{2\mu^2 t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$

$$E(X) = M'_X(0) = \mu(1-0)^{-\frac{1}{2}}(1) = \mu,\quad E(X^2) = M''_X(0) = \frac{\mu^3}{\lambda} + \mu^2,$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\mu^3}{\lambda} + \mu^2 - \mu^2 = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

Distribusi statistik yang berkaitan dengan distribusi inversi Gauss

Tweedie (1957) menyatakan sebagai berikut : jika diketahui himpunan populasi dengan μ_i dan λ_i parameter populasi ke-i, $a_i = C\dfrac{\lambda_i}{\mu_i^2}$, C konstanta. Distribusi fungsi linear $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ adalah inversi Gauss dengan $\mu = C\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ dan $\lambda = C\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^2$.

Sifat ini dijadikan lemma berikut.

Lemma 1

Jika X1, 1 = 1, 2, ..., n variabel random independen berdistribusi IG (μ_i, λ_i), $a_i = C\frac{\lambda_i}{\mu_i^2}$, dengan C suatu konstanta, maka $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ berdistribusi IG (μ, λ) dengan $\mu = C\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ dan $\lambda = C(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i})^2$.

Bukti:

Jika fungsi pembangkit momen distribusi inversi Gauss adalah $M_{X_i}(t, \mu_i, \lambda_i) = \exp\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu_i^2 t}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$,

maka $M_{a_i x_i}(t, \mu_i, \lambda_i) = \exp\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu_i^2 a_i t}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$. karena Xi $i = 1, 2, ..., n$, maka

$$M_Y(t, \mu_i, \lambda_i) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu_i^2 a_i t}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

Substitusi $a_i = C\frac{\lambda_i}{\mu_i^2}$,

$$M_Y(t, \mu_i, \lambda_i) = \exp\left\{\frac{C(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i})^2}{C\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}}\left[1 - \left(1 - \frac{2C^2(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i})^2 t}{C(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i})^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$, dengan $\mu = C\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ dan $\lambda = C(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_i})^2$. Ruas kanan persamaan terakhir adalah fungsi pembangkit momen distribusi inversi Gauss dengan parameter μ dan λ.

Akibat 2

Jika $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ variabel random independen berdistribusi inversi Gauss yang masing-masing mempunyai parameter μ dan λ, maka $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ berdistribusi inversi Gauss dengan parameter μ dan $n\lambda$.

Lemma 3

Jika $X \sim IG(\mu, \lambda)$, maka $aX \sim IG(a\mu, a\lambda)$ untuk suatu $a > 0$.

$$M_X(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(1 - \frac{2(\mu a)^2 t}{a\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$M_{ax}(t)$ adalah fungsi pembangkit momen distribusi inversi Gauss dengan parameter $a\mu$ dan $a\lambda$. Jadi terbukti bahwa $aX \sim IG(a\mu, a\lambda)$ untuk suatu $a > 0$.

Shuster (1968) telah membuktikan bahwa jika X berdistribusi inversi Gauss dengan parameter μ dan λ, $\frac{\lambda(X-\mu)^2}{\mu^2 X}$ berdistribusi khi-kuadrat berderajat bebas 1.

Lemma 4

Jika suatu variabel random berdistribusi $IG(\mu,\lambda)$, maka $\frac{\lambda(X-\mu)^2}{\mu^2 X}$ berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas 1, dinotasikan $\chi^2_{(1)}$.

Bukti

Dengan menggunakan transformasi $Y = \frac{\sqrt{\lambda}(X-\mu)}{\mu\sqrt{X}}$, menurut Chhikara dan Folks (1975) fungsi padat peluang Y adalah

$$f_Y(y)=\left[1-\frac{y}{\sqrt{\frac{4\lambda}{\mu}+y^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right], -\infty<y<\infty .$$

Selanjutnya jika $z = Y^2$, maka

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(Y^2\le z)=P\left(-\sqrt{z}\le Y\le\sqrt{z}\right)=F_X\left(\sqrt{z}\right)-F_X\left(-\sqrt{z}\right)$$

sehingga $f_Z(z)=\frac{\partial}{\partial z}F_Y\left(\sqrt{z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}F_Y\left(-\sqrt{z}\right)$

$$f_Z(z)=f_Y\left(\sqrt{z}\right)\left(\frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}\right)-f_Y\left(-\sqrt{z}\right)\left(-\frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}\right)=\left[f_Y\left(\sqrt{z}\right)+f_Y\left(-\sqrt{z}\right)\right]\left(\frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$f_Z(z)=\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}$, $0<z<\infty$, $f_Z(z)$ merupakan fungsi padat peluang distribusi khi-kuadrat berderajat bebas 1.

Lemma 5

Jika y_i; $i = 1, 2, ..., n$ adalah peubah acak independen berdistribusi IG (μ,λ_i) dengan $\lambda i = \lambda w_i$, w_i suatu bilangan konstan positif μ dan λ parameter, maka (a) $\lambda\sum_{i=1}^{n} w_i(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{y.})$ berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas n-1, ditulis $\chi^2(n\text{-}1)$, dengan $y. = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

$\lambda\sum_{i=1}^{n} w_i(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{y.})$ dan y. independen.

Bukti: Lihat Tweedie (1957), halaman 368.

Interval Kalibrasi Regresi Inversi Gauss Model Lamda Tunggal

Model regresi inversi Gauss dengan lamda tunggal seperti yang diperkenalkan oleh Davis adalah model regresi Y pada X dengan mean Y merupakan fungsi linear dari X, dan untuk setiap X, Y berdistribusi inversi Gauss. Pada model ini ditulis

Y_i = IG $(\beta x_i, \lambda)$; i = 1, 2, ..., n; $x > 0$, $\beta > 0$ dan $\lambda > 0$.

Pendugaan Parameter

Berdasarkan observasi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, fungsi *likelihood* β adalah

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{-3/2}\right)\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{-\lambda(y_i-\beta x_i)^2}{2\beta^2 x_i^2 y_i}\right],$$

fungsi *log likelihood* β adalah:

$$\ell = \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log(y_i) - \frac{\lambda}{2\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2} + \frac{\lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}$$

Jika diambil turunan pertama terhadap β dan disamakan dengan nol, diperoleh, penduga likelihood maksimum untuk β yaitu:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

Jika ditambahkan pada n independen Yi sebanyak t independen Yi yang diobservasi pada X tak diketahui, namakan Xo, maka diperoleh penduga likelihood maksimum untuk λ:

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} = \frac{1}{(n+t)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-\tilde{\beta}x_i\right)^2}{\tilde{\beta}^2 x_i^2 y_i} + \sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{\left(y_i-\tilde{\beta}x_0\right)^2}{\tilde{\beta}^2 x_0^2 y_i}\right\}.$$

Distribusi yang berkaitan dengan statistik $\tilde{\lambda}$ dan $\tilde{\beta}$

Berdasarkan lemma 1 dan dengan mengganti $a_i = \frac{1}{x_i^2}$ dan $c = \frac{\beta^2}{\lambda}$, diperoleh $\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2} \sim IG\left(\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}, \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2\right)$.

Selanjutnya dengan menggunakan lemma 3 diperoleh

$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \sim IG\left(\beta, \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$. $E(\tilde{\beta}) = \beta$ berarti $\tilde{\beta}$ merupakan estimator tak bias untuk β. Berdasarkan distribusi $\tilde{\beta}$ dan menggunakan lemma 4 diperoleh

$$\frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} (\tilde{\beta} - \beta)^2}{\beta^2 \tilde{\beta}} \sim \chi^2_{(1)}.$$

Distribusi yang berkaitan dengan $\tilde{\lambda}$ diperoleh sebagai berikut: untuk i = 1, 2, ..., n+t, $Y_i \sim IG(\beta x_i, \lambda)$; $x > 0$, $\beta > 0$ dan $\lambda > 0$.

Menurut lemma 4 $\frac{\lambda(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i} \sim \chi^2_{(1)}$, maka

$$\lambda \sum_{i=1}^{n+t} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i} \sim \chi^2_{(n+t)}.$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n+t} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i} = \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i} + \sum_{i=n+1}^{n+t} \frac{(y_i - \beta x_0)^2}{\beta^2 x_0^2 y_i} \right\} = \frac{(n+t)\lambda}{\tilde{\lambda}},$$

Jadi diperoleh $\frac{(n+t)\lambda}{\tilde{\lambda}}$ berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas n + t $E\left(\frac{(n+t)\lambda}{\tilde{\lambda}}\right) = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ yang berarti $\frac{1}{\tilde{\lambda}}$ merupakan estimator tak bias untuk $\frac{1}{\lambda}$.

Untuk $i = n+1, n+2, \ldots, n+t, Y_i \sim IG(\beta x_0, \lambda);\ x_0 > 0;\ \beta > 0;\ \lambda > 0$

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{t} \sum_{i=n+1}^{n+t} y_i \sim IG(\beta x_0, t\lambda) \qquad \text{(Akibat 2)}$$

$$\frac{t\lambda(\bar{y}_0 - \beta x_0)^2}{\beta^2 x_0^2 y_i} \sim \chi^2_{(1)} \qquad \text{(Akibat 4)}$$

Interval Kalibrasi X_o untuk Regresi Inversi Gauss Model Lamda Tunggal

Terlebih dahulu dibuat dekomposisi untuk

$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i}$ dengan cara mensubstitusi $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta x_i)^2}{\beta^2 x_i^2 y_i} = \frac{(\tilde{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{\beta^2 \tilde{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\tilde{y}_i}\right), \qquad (1)$$

dengan $\tilde{y}_i = \tilde{\beta} x_i$.

Jika dimisalkan $\bar{y}_0 = \frac{1}{t} \sum^{n+t} y_i$, maka

$$\sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{(y_i-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2y_i}=\frac{t(\bar{y}_0-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2\bar{y}_0}+\sum_{i=n+1}^{n+t}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{\bar{y}_0}\right) \qquad (2)$$

Dari dekomposisi (1) dan (2), maka diperoleh persamaan

$$\lambda\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta x_i)^2}{\beta^2x_i^2y_i}+\sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{(y_i-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2y_i}\right\}=$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{\tilde{y}_i}\right)+\lambda\sum_{i=n+1}^{n+t}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{\bar{y}_0}\right)+\lambda\frac{(\tilde{\beta}-\beta)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{\beta^2\tilde{\beta}}+\lambda\frac{t(\bar{y}_0-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2\bar{y}_0} \qquad (3)$$

Menurut Woldie dan Folks (1995) ruas kiri persamaan (3) adalah variael khi-kuadrat dengan derajat bebas n + t, sementara suku-suku pada ruas kanan juga variabel khi-kuadrat yang masing-masing berderajat bebas n - 1, t - 1, 1, dan 1 yang saling independen.

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n+t$ penduga likelihood maksimum untuk β adalah $\dfrac{\sum_{i=1}^{n+t}\frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n+t}\frac{1}{x_i}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2}+\sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{y_i}{x_0^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+\sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{1}{x_0}}$. Substitusi $\tilde{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$, diperoleh persamaan $\beta=\dfrac{t\bar{y}_0+\tilde{\beta}x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{tx_0+x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$. Suku ketiga dan keempat ruas kanan persamaan (3) adalah

$$\lambda\frac{(\tilde{\beta}-\beta)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{\beta^2\tilde{\beta}}=\frac{\lambda t^2(\tilde{\beta}x_0-\bar{y}_0)^2}{\tilde{\beta}\left(t\bar{y}_0+\tilde{\beta}x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2} \qquad (4)$$

dan $$\lambda\frac{t(\bar{y}_0-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2\bar{y}_0}=\frac{\lambda t x_0^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2(\bar{y}_0-\tilde{\beta}x_0)^2}{\bar{y}_0\left(t\bar{y}_0+\tilde{\beta}x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^2} \qquad (5)$$

Dengan persamaan (4) dan (5), maka jumlah dua suku terakhir ruas kanan persamaan (3) menjadi :

$$\lambda\frac{(\tilde{\beta}-\beta)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{\beta^2\tilde{\beta}}+\lambda\frac{t(\bar{y}_0-\beta x_0)^2}{\beta^2 x_0^2\bar{y}_0}=\frac{\lambda t\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)(\bar{y}_0-\tilde{\beta}x_0)^2}{\tilde{\beta}\bar{y}_0\left(t\bar{y}_0+\tilde{\beta}x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)}. \qquad (6)$$

Berdasarkan persamaan (3), ruas kanan persamaan (6) adalah variabel khi-kuadrat dengan derajat bebas 2.

Jika $D=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{\tilde{y}_i}\right)+\sum_{i=n+1}^{n+t}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{\bar{y}_0}\right)$ dan berdasarkan persamaan (3), maka λD variabel khi-kuadrat berderajat bebas n+t-2 yang merupakan jumlah independen dua variabel n-1 dan t-1. λD dan ruas kanan persamaan (6) adalah independen. Selanjutnya jika diambil rasio antara ruas kanan persamaan (6) dibagi 2 dengan $\lambda D/(n+t-2)$, diperoleh variabel F dengan derajat bebas 2 dan n+t-2.

Untuk memperoleh interval kalibrasi X_0 dengan tingkat kepercayaan 100 (1 - α) %, diselesaikan pertidaksamaan berikut ini untuk x_0.

$$\frac{t(n+t-2)x_0^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)(\bar{y}_0-\tilde{\beta}x_0)^2}{2\tilde{\beta}D\bar{y}_0\left(t\bar{y}_0+\tilde{\beta}x_0^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)} \le F, \text{ dengan } F=F_{(2,n+t-2,\,1-\alpha)}$$

Misalkan $A=t(n+t-2)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$, maka diperoleh persamaan kuadrat dalam x_0 berikut :

$$\tilde{\beta}^2\left(A-2DF\bar{y}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)x_0^2-2A\tilde{\beta}\bar{y}_0x_0-2\tilde{\beta}DFt\bar{y}_0^2+A\bar{y}_0^2=0 \qquad (7)$$

$$L=\frac{\bar{y}_0}{\tilde{\beta}}\left\{\frac{1}{1-\frac{2DF\bar{y}_0}{t(n+t-2)}}-\frac{\sqrt{2DFt\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\left(\tilde{\beta}t(n+t-2)+(n+t-2)\bar{y}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-2\tilde{\beta}DF\bar{y}_0\right)}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}(t(n+t-2)-2DF\bar{y}_0)}\right\}\text{ dan}$$

$$U=\frac{\bar{y}_0}{\tilde{\beta}}\left\{\frac{1}{1-\frac{2DF\bar{y}_0}{t(n+t-2)}}+\frac{\sqrt{2DFt\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\left(\tilde{\beta}t(n+t-2)+(n+t-2)\bar{y}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-2\tilde{\beta}DF\bar{y}_0\right)}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}(t(n+t-2)-2DF\bar{y}_0)}\right\}.$$

Untuk memperoleh interval kalibrasi x_o dengan tingkat kepercayaan 100 (1 - α) %, dirinci sebagai berikut :

1. Untuk $t(n+t\text{-}2) - 2DFy_o$ positif dan akar-akar persamaan kuadrat (7) bernilai real, diperoleh 100 (1 - α) % interval kepercayaan untuk x_o yaitu (L,U) jika L positif dan (O,U) jika L negatif.
2. Untuk $t(n+t\text{-}2) - 2DFy_o$ negatif dan akar-akar persamaan kuadrat (7) bernilai real, diperoleh 100 (1 - α) % interval kepercayaan untuk x_o, yaitu (L,∞) jika L positif dan (O,∞) jika L negatif.
3. Jika akar-akar persamaan kuadrat (7) bilangan kompleks, maka tidak diperoleh interval estimasi untuk x_o.

KESIMPULAN

1. Pada model regresi Gauss untuk model lamda tunggal, diperoleh estimasi parameter β dan λ yaitu

$$\tilde{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\text{ dan }\tilde{\lambda}=(n+t)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta x_i)^2}{\beta^2x_i^2y_i}+\sum_{i=n+1}^{n+t}\frac{(y_i-\beta x_0)^2}{\beta^2x_0^2y_i}\right\}^{-1}.$$

$\tilde{\beta}$ berdistribusi inversi Gauss dengan parameter β

dan $\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ sedangkan $\frac{(n+t)\lambda}{\tilde{\lambda}}$ berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas n+t.

2. Model lamda tunggal, jika penyelesaian kuadrat yang diperoleh mempunyai akar-akar real, maka didapatkan interval kalibrasi untuk X_0 dan jika tidak, maka tidak ada interval kalibrasi untuk X_0.

DAFTAR PUSTAKA

Adnan, R.W.T. dan Soejoeti, Z.(1983). Beberapa Sifat Distribusi Inversi Gauss. *Makalah*, disampaikan pada Konferensi Matematika Nasional V, Universitas Indonesia. Jakarta.

Chhikara, R.S. dan Folks, J.L.(1978). The Inverse Gaussian Distribution and Its Statistical Application, A Review. *J. Royal Stat. Society*, Series B. 40, 263-289.

Chhikara, R.S. dan Folks, J.L.(1975). Statistical Distribution Related to the Inverse Gaussian. *Commun. Statits. -Theory Meth.*, 4(12), 1081-1091.

Michael, J.R., Schucany,W.R. dan Haas,R.W.(1976). Generating Random Variables Using Transformations with Multiple Roots. *American Statist.*, 30,88-90.

Sardjono, dkk.(1993). Model Distribusi Inversi Gauss Dalam Analisis Regresi. *Laporan Penelitian*. FMIPA, Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Shuster, J.(1968). On The Inverse Gaussian Distribution. J. *American Statist.*, 63, 1514-1516.

Tweedie, M.C.K.(1957), Statistical Inverse Gaussian Distribution I. *Statistics*. 28,362-377.

Tweedie, M.C.K.(1957). Statistical Inverse Gaussian Distribution II. *Statistics*. 28,696-705.

Woldie, M. dan Folks, J.L. (1995). Calibration for Inverse Gaussian Regression. *Commun. Statits. Theory Meth.*, 24(10), 2609-2620.